DEVOIR NUMÉRO 2 VERSION B CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Remarques / Commentaires / erreurs fréquentes.

Stratégie générale, décryptage du sujet.

-

Remarques plus spécifiques sur l'exercice 1.

-

Remarques plus spécifiques sur l'exercice 2.

-

Remarques plus spécifiques sur l'exercice 3.

-

Remarques plus spécifiques sur l'exercice 4.

-

Remarques plus spécifiques sur l'exercice 5.

-

Barème et exigences.

Exerice 1 : 10 points. Les points sont donnés un peu selon mon ressenti, mais grosso modo 2 points pour expliquer que la différence de notation est une affaire d'ordre, 2 points pour la définition irréprochable de famille libre et génératrice, 2 pour citer le résultat d'existence des coordonnées dans une base, et les 4 points restants pour faire la distinction entre ce qui relève de l'ordre et ce qui n'en relève pas.

Exercice 2 : 14 points.

1. 4 points, il faut clairement faire apparaître les 4 propriétés requises sur f (1 point pour chaque).

2. **a.** 1 point, on calcule la limite facilement avec le théorème des gendarmes.
b. 1 point, facile aussi.
c. 2 points, dont un pour justifier de la dérivabilité.
d. 2 points.
e. 2 points, il suffit de constater que $g(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x^2\right)$ (mais il faut y penser).

3. 2 points, 1 pour citer la formule de Taylor à l'ordre 2 (avec ses hypothèses) et 1 pour dire qu'on vient de montrer qu'il n'y a pas besoin que f soit $\mathcal{C}^2$.

Date: 17 Octobre 2026 8h30-12h30.
http://louismerlin.fr.

Exercice 3 : 18 points.

1. **a.** 1 point, question de cours.
   b. 1 point, attention à bien dire que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ pour légitimer la substitution.
   c. 2 points, si le terme "série alternée" apparaît, je m'en contente. Sinon, il faut expliquer comment l'étude des sommes partielles paires et impaires donne le résultat.
   d. (i) 3 point, la première partie est faite en cours et c'est simple.Pour la 2ème, il suffit presque de dire que $\ln(1+x)$ s'annule en 0.
   (ii) 3 points, 2 pour la majoration de l'intégrale par x^4, 1 pour la conclusion avec le $\mathbf{o}()$.
   (iii) 3 points, dont 1 pour le DL du terme général.
   e. 1 point, il suffit de citer le cours.
2. **a.** 2 points, 1 pour la majoration bien expliquée (avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0) et 1 pour la comparaison.
   b. 2 points, 1 pour l'exemple, 1 pour les explications.
   c. hors barème.

Exercice 4 : 35 points. a

1. **a.** 1 points.
   b. 3 points, 1 pour la résolution du système (c'est très simple), 2 pour commenter sur le fait qu'on a trouvé une base de solutions.
   c. 2 points : 1 point pour le théorème du rang, 1 point pour l'argument de dimension. D'autres stratégies sont possibles mais personne n'a tenté autrement.
   d. 2 points. Un peu de calcul mais pas vraiment de difficulté.
   e. 1 point.
   f. 1 point.
   g. 1 point.
2. **a.** 2 points, 1 pour le calcul, 1 pour la conclusion.
   b. 2 points. Beaucoup de calcul.
   c. 2 points.
   d. 1 point.
   e. 1 point.
   f. 1 points.
3. 2 points, question difficile.
4. 1 point, il suffit de récapituler.
5. **a.** 2 points. Beaucoup de calculs.
   b. 2 points, 0 si manipulation illégale de matrices (diviser par une matrice,...)
6. **a.** (i) 2 point.
   (ii) 2 points.
   b. 1 point.
7. **a.** 1 point.
   b. 2 points, quelques points de rédaction délicats.

Exercice 5 : 45 points.

1. **a.** 8 points, 2 par ligne.
   b. 6 points, 2 pour analyser `L`, 2 pour `c` et 2 pour comprendre ce que donne le programme.
   c. 2 points pour la conjecture, aucune justification n'est demandée.
2. 2 points, une rapide justification suffit.

3. **a.** 1 point, aucune justification attendue.
b. 3 points, 1 pour reconnaître la loi (avec les bons paramètres), 1 pour l'espérance, 1 pour la variance.

4. 3 points, 1 pour la relation, 1 pour l'espérance, 1 pour le commentaire sur le cas $p = 1/2$.

5. 3 points, 2 pour la loi de X_{2n} et 1 pour l'expression de p_n.

6. **a.** 3 points, 1 pour chaque.
b. (i) 1 point, c'est la définition du coefficient binomial.
(ii) 4 points pour la fonction, quelques points généreux pour la structure du programme.
c. 2 points, dont 1 pour la seule mention de la formule du binôme.
d. 2 points, dont un pour la seule mention de la symétrie des coefficients binomiaux.

7. **a.** 2 points.
b. 2 points.
c. 1 point.

8. 7 points, 3 pour p_1, p_2, p_3, 2 pour la formule, 1 pour la limite, 1 pour confronter le résultat à la conjecture.

Orthographe, présentation, lisibilité : 7 points.

Total : 129.

Correction détaillée.

Correction 1 *Quelques idées.*

La notation

$$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$$

signifie que les vecteurs de la base sont ordonnées. Tandis que dans la notation

$$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\},$$

l'ordre des éléments n'a pas d'importance. Faisons maintenant le tour des raisons qui pourraient nous pousser à choisir l'une ou l'autre alternative.

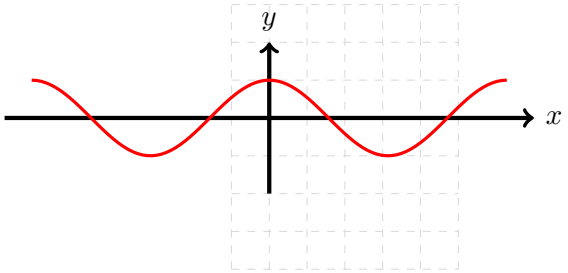
1. **Arguments en faveur de $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$.**
Pour définir une base, il n'est pas besoin d'ordonner les vecteurs. En effet, dire que la famille est génératrice signifie que
$$\text{Vect}(e_1, \cdots, e_n) = E$$
et ceci ne demande pas de choisir un ordre ($\text{Vect}(e_1, e_2, \cdots, e_n) = \text{Vect}(e_2, e_1, \cdots, e_n)$ par exemple).
De la même manière, dire qu'il n'existe pas d'autre combinaison linéaire que la combinaison triviale qui soit égale au vecteur nul ne requiert aucun ordre sur les vecteurs (une combinaison linéaire de $e_1, e_2, \cdots, e_n$ est aussi une combinaison linéaire de $e_2, e_1, \cdots, e_n$ par exemple, grâce à l'axiome de commutativité de la loi interne des espaces vectoriels).

2. **Arguments en faveur de $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$.**
S'il n'y a pas besoin d'un ordre pour définir une base, il faut en revanche un ordre pour définir les coordonnées d'un vecteur dans une base. En effet, dans $\mathbb{R}^2$ par exemple, muni de sa base canonique $((1,0);(0,1))$ (dans cet ordre !), le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ n'est pas le même vecteur que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.
Le fait de pouvoir choisir des coordonnées uniques à chaque vecteur est la propriété la plus importante d'une base, celle qui permet de ramener tous les problèmes d'algèbre linéaire à des résolution de systèmes, et il serait dommage de s'en priver en ne choisissant pas l'ordre des vecteurs de la base.

3. Conclusion. Dans une perspective *minimaliste*, on préfère ne pas donner d'ordre aux vecteurs d'une base, puisqu'une base se définit sans avoir à choisir un ordre. Dans une perspective *utilitariste*, pour pouvoir donner aux vecteurs des coordonnées, on préfère ordonner les vecteurs d'une base.

Correction 2

1. On dessine une fonction bornée. La raison pour laquelle f n'a pas de limite en $+\infty$ doit donc être parce que f oscille. On fait attention à ne pas faire varier f trop rapidement pour que sa dérivée soit bornée aussi. On peut par exemple prendre une fonction de ce type.



2. a. Puisque f est bornée, il existe M tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leqslant M.$$

Ainsi, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant |g(x)| \leqslant |x|^3 M.$$

Or puisque $\lim\limits_{x\to 0} |x|^3 M = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $g(x)$ tend vers 0 en 0.

b. Le taux d'accroissement de g en 0 est

$$\frac{g(x)-g(0)}{x} = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right).$$

On montre, exactement comme à la question précédente que ce taux d'accroissement tend vers 0, toujours en utilisant le fait que f est bornée.

c. On dérive g comme une composée (g est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables) :

$$g'(x) = 3x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + x^3\left(-\frac{1}{x^2}\right) f'\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) - x f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Attention à savoir dériver une composée !!

d. On étudie cette fois le taux d'accroissement de g' en 0 :

$$\frac{g'(x)-g'(0)}{x} = \frac{3x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) - x f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 3x f\left(\frac{1}{x}\right) - f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or cette fois-ci, on a bien comme plus haut

$$\lim_{x\to 0} 3x f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

mais $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ diverge lorsque x tend vers 0. Ainsi le taux d'accroissement de g' diverge en 0 et on en déduit que g' n'est pas dérivable en 0.

e. C'est une question plus difficile. On a

$$\frac{g(x)}{x^2} = x f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = 0$. On s'aperçoit donc que $g(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x^2\right)$. Ceci est un développement limité d'ordre 2 en 0 (pour lequel il n'y a que du reste !). Ainsi g admet bien un développement limité en 0 à l'ordre 2.

3. La fonction g a donc les propriétés suivantes :

- Elle n'est pas dérivable 2 fois en 0.
- Elle admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Or le cours nous dit (c'est la formule de Taylor à l'ordre 2) que si une fonction est dérivable 2 fois en 0, elle admet un développement limité à l'ordre 2. La fonction g fournit donc un contre-exemple à la réciproque.

Correction 3

1. a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (l'une converge si et seulement si l'autre converge).

b. C'est un équivalent usuel du cours. Puisque la suite de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ tend vers 0, on obtient

$$u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = v_n.$$

c. C'est une stratégie qui a été étudiée au DS1 et revue dans le cours sur les séries. On dit que $\sum v_n$ est une série alternée. Dans ce cas, on peut montrer la convergence de la série en montrant que les deux suites extraites des termes pairs et impairs de la suite des sommes partielles sont adjacentes. On montre ainsi que $\sum v_n$ est convergente.

d. (i) On part de la formule classique

$$1-x+x^2 = \frac{1+x^3}{1+x},$$

que l'on réécrit comme dans l'énoncé. Ensuite, on intègre cette égalité entre 0 et x. Or $\displaystyle\int_0^x \ln(1+t)dt = \ln(1+x)$ et on obtient la formule voulue.

(ii) Il suffit de montrer que la partie intégrale est un $\underset{x\to0}{\mathbf{o}}\left(x^3\right)$. Or pour tout $t\in[0,x]$, on a $0 \leqslant \frac{t^3}{1+t} \leqslant x^3$. Puis, par positivité de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^3}{1+t}dt \leqslant x^4.$$

Une telle fonction encadrée par 0 et x^4 est bien un $\underset{x\to0}{\mathbf{o}}\left(x^3\right)$. En effet, on obtient alors,

$$0 \leqslant \frac{\left|-\displaystyle\int_0^x \frac{t^3}{1+t}dt\right|}{x^3} \leqslant x.$$

Par encadrement, on a donc :

$$\lim_{x\to0} \frac{\left|-\displaystyle\int_0^x \frac{t^3}{1+t}dt\right|}{x^3} = 0.$$

(iii) Dans le développement limité précédent, on opère la subsitution $x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, ce qui est possible car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$. On obtient alors

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^{3/2}} + \underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Il apparaît mainenant que $\sum u_n$ est la somme de 4 séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \sum \frac{-1}{2n}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} \quad \text{et} \quad \sum \underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Parmi ces quatre séries, 3 d'entre elles sont convergentes et seule $\sum \frac{-1}{2n}$ est divergente. Il suit donc que leur somme est divergente.

e. Nous venons donc de trouver deux suites équivalentes $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ telles que $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge. Bien sûr, ce n'est pas une contradiction avec le critère de comparaison par équivalent mais c'est plutôt le signe que l'hypothèse de positivité des suites est indispensable. En effet, u_n et v_n ne sont pas de signe constant.

2. a. Si $\sum u_n$ est convergente, c'est que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, et comme $u_n \geqslant 0$, on en déduit qu'il existe un rang à partir duquel $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Ainsi on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_n^2$ et le critère de comparaison par majoration s'applique et montre que $\sum u_n^2$ est convergente.

b. Pour trouver un tel exemple, il ne faut donc pas prendre des séries à termes positifs, sinon la question **a** montre qu'un tel exemple n'existe pas. On peut alors penser à des séries alternées. En effet, prenons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. C'est une des deux séries de la question **1** et on sait qu'elle converge. Mais $u_n^2 = \frac{1}{n}$ et $\sum u_n^2$ est la série harmonique donc divergente.

c. Une idée sans détails. L'idée est de trouver une série où 3 termes consécutifs de la série se compensent (comme dans les séries alternées mais 3 par 3) mais où la compensation se perd quand on passe à la puissance 3. On peut penser par exemple à une série de terme général $u_n = \frac{\varepsilon_n}{n^{1/3}}$ où la suite ε est celle qui produit la compensation de trois termes consécutifs. Posons par exemple $\varepsilon_{3k+1} = 1$, $\varepsilon_{3k+2} = -1/2$ et $\varepsilon_{3k+3} = -1/2$. C'est une façon de décrire la suite périodique

$$\varepsilon = (1, -1/2, -1/2, 1, -1/2, -1/2, 1, -1/2, -1/2, \cdots).$$

On peut alors montrer (mais c'est difficile) que $\sum u_n$ converge, en s'inspirant de la méthode de convergence des séries alternées. Mais la série des cubes ne se comporte pas de la même façon. En effet $u_n^3 = \frac{\varepsilon^3}{n}$ et la suite des ε^3 est "déséquilibrée", elle vaut

$$(1, -1/8, -1/8, 1, -1/8, -1/8, \cdots)$$

de sorte que $\sum u_n^3$ se comporte en fait comme la série harmonique (donc divergente). [1]

Correction 4

1. a. On prend donc comme d'habitude deux matrices A_1 et A_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, alors $\alpha A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + a_2 & \alpha b_1 + b_2 \\ \alpha c_1 + c_2 & \alpha d_1 + d_2 \end{pmatrix}$ et on obtient

$$\mathrm{tr}(\alpha A_1 + A_2) = \alpha a_1 + a_2 + \alpha d_1 + d_2 = \alpha(a_1 + d_1) + a_2 + d_2 = \alpha \mathrm{tr}(A_1) + \mathrm{tr}(A_2),$$

ce qui montre bien que la trace est linéaire.

b. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) &\iff a + d = 0 \\ &\iff a = -d \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ &\iff A \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. On vérifie facilement que les trois matrices qui engendrent $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ sont libres et on a donc trouvé une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

1. Utiliser les vacances d'automne pour trouver des développements limités de u_n et u_n^3 pour compléter l'étude des deux séries me semble une bonne idée...

c. On sait que $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$ et puisque Ker(tr) est de dimension 3, le théorème du rang donne

$$\mathrm{rg}(\mathrm{tr}) = 4 - 3 = 1.$$

Or l'image de la trace est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Mais il n'y a qu'un seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ qui est de dimension 1 : c'est $\mathbb{R}$ lui-même. Ainsi $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.

d. C'est une question de calculs. On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Alors

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & \star \\ \star & cy+dt \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa+yc & \star \\ \star & zb+td \end{pmatrix}$$

et on constate que ces deux matrices ont même trace (la notation $\star$ signifie qu'on ne cherche pas à calculer le coefficient de la matrice, parce qu'il est sans influence sur la trace).

e. Dans la formule précédente, on remplace A par P^{-1} et B par AP et il vient

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(APP^{-1}) = \mathrm{tr}(A).$$

f. Si deux matrices A et B sont semblables, alors il existe P tel que $B = PAP^{-1}$ et d'après la question précédente, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

g. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et ces deux matrices ont bien même trace (qui d'ailleurs vaut $a+d$).

2. a. On a

$$\mathrm{d}(2I) = \mathrm{d}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 4 = 4\mathrm{d}(I) \neq 2\mathrm{d}(I)$$

et donc d n'est pas linéaire.

b. On pose à nouveau

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

et on calcule

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (ax+bz)(cy+dt) - (cx+dz)(ay+bt) \\ &= axcy + axdt + bzcy + bzdt - cxay - cxbt - dzay - dzbt \\ &= axdt + bzcy - cxbt - dzay \end{aligned}$$

Et

$$BA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa+yc & xb+yd \\ za+tc & zb+td \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{aligned} det(BA) &= (xa+yc)(zb+td) - (za+tc)(xb+yd) \\ &= xazb + xatd + yczb + yctd - zaxb - zayd - tcxb - tcyd \\ &= xatd + yczb - zayd - tcxb \end{aligned}$$

On constate finalement que ces deux expressions sont les mêmes.

c. Si P est inversible, c'est donc qu'il existe une matrice notée P^{-1} telle que $PP^{-1} = I$. D'après la formule qui précède, on a alors $\det(PP^{-1}) = \det(P)\det(P^{-1})$. Mais par ailleurs $\det(PP^{-1}) = \det(I) = 1$. Le nombre $\det(P)$ ne peut pas être nul sinon le produit $\det(P)det(P^{-1})$ le serait aussi (mais il vaut 1).

d. On raisonne exactement comme pour la trace.

e. Idem.

f. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et

$$\det(A) = ad - bc \quad \text{et} \quad \det({}^tA) = ad - cb.$$

On voit alors que A et ${}^tA$ ont même déterminant.

3. C'est une question un peu difficile pour les carrés mais classique pour les cubes. On peut par exemple prendre comme contre-exemple les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que $\det(M) = \det(N) = 1$ tandis que $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(N) = 2$. Or ces matrices ne sont pas semblables car il n'y a pas de matrice semblable à N autre que N elle-même. En effet, une matrice semblable à N est une matrice de la forme PNP^{-1}. Mais N est la matrice identité et commute donc avec la matrice P, de sorte que $PNP^{-1} = N$. La matrice M n'étant pas égale à la matrice N, elle ne peut donc être semblable à N.

4. D'après la question **1.f**, si A est semblable à D, alors elle a la même trace que D. Or $\mathrm{tr}(D) = \lambda_1 + \lambda_2$. Donc $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$. D'après la question **2.e**, si A est semblable à D, alors elle a le même déterminant que D. Or $\det(D) = \lambda_1\lambda_2$. Donc $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$.

5. **a.** C'est encore une question de calcul : on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on a

$$\begin{aligned} A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I &= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)^2 - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2-ad & -ab-db \\ -ac-dc & -ad-d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ab-db \\ ca+dc-ac-dc & cb+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b. Si A est une matrice de déterminant non nul, on peut tirer de l'égalité

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I$$

la relation

$$A\left(-\frac{1}{\det(A)}A + \frac{\mathrm{tr}(A)}{\det(A)}I\right) = I,$$

ce qui montre bien que A est inversible et que $A^{-1} = -\frac{1}{\det(A)}A + \frac{\mathrm{tr}(A)}{\det(A)}I$.

6. **a.** (i) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $Ae_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et la relation $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ donne

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc $a = \lambda_1$ et $c = 0$.

De même $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ donne $d = \lambda_2$ et $b = 0$. Ainsi la matrice A est égale à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

En particulier si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors A est colinéaire à I, ce qui est exclu.

(ii) On sait déjà que si $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ et $Ae_2 = \lambda_2 e_2$, alors A est diagonale, égale à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
Exprimons ensuite la relation $Aw = \lambda_3 w$.

$$Aw = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Si $Aw = \lambda_3 w$, on obtiens

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

et finalement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, ce qui est toujours exclu.

b. Parmi les trois vecteurs e_1, e_2 et w, il y en a donc un (au moins) qui vérifie $Ax \neq \lambda x$. Pour ce choix de vecteur x parmi les trois, on vient donc de montrer que les deux vecteurs x et Ax ne sont pas colinéaires. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Mais puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, c'est une base.

7. a. Il s'agit donc d'exprimer les images des vecteurs x et Ax en coordonnées dans x et Ax. Pour le vecteur x, on a évidemment

$$Ax = 0 \times x + 1 \times Ax$$

et la première colonne de l'endomorphisme associé à A dans cette base est donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour la deuxième colonne, on utilise la question **5.a** : on a

$$A(Ax) = A^2 x = \mathrm{tr}(A)Ax - \det(A)x$$

et la 2ème colonne de la matrice de l'endomorphisme associé à A est alors $\begin{pmatrix} -\det(A) \\ \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}$. En résumé, si on note f l'endomorphisme associé à A, alors

$$\mathrm{Mat}(f, (x, Ax)) = \begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

b. Si on note g l'endomorphisme associé à ${}^tA$, le travail précédent permet de trouver une base $\mathcal{B}$ dans laquelle

$$\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -\det({}^tA) \\ 1 & \mathrm{tr}({}^tA) \end{pmatrix}.$$

Or, on a montré précédemment qu'une matrice et sa transposée avaient même déterminant et même trace. On conclut que

$$\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire qu'il existe deux bases dans lesquelles f et g ont la même matrice. Ceci signifie que les endomorphismes f et g sont les mêmes et que les matrices A et ${}^tA$ sont conjuguées, d'après la formule de changement de base [2].

Correction 5

Partie I : Cours en bourse d'une action

2. que ne connaissent pas encore les carrés...

On s'intéresse aux **variations** journalières d'une action sur un marché financier, qu'on suppose aléatoires. On introduit, pour $j \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_j correspondant à l'état de la variation de l'action le jour j. Naturellement, au début de l'observation, l'action n'a pas encore varié et on a $X_0 = 0$. On suppose de plus que, chaque jour, le cours de l'action :

- monte d'une unité $(+1)$ avec une probabilité p $(0 < p < 1)$;
- ou bien descend d'une unité (-1) avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note X_{2n} le cours constaté le $2n^{ième}$ jour suivant le début de l'observation.

Par exemple, si $n = 2$ et que le cours a baissé les trois premiers jours et monté le quatrième jour, on a $X_4 = -1 - 1 - 1 + 1 = -2$.

Enfin, on note

$$p_n = P(X_{2n} \geq 0)$$

et on s'intéresse à l'évolution de p_n lorsque n devient grand, c'est à dire qu'on cherche à estimer la probabilité, après un grand nombre (pair) de jours, que le cours de l'action soit en hausse.

1. Simulation sous Python.

a. On utilise donc une boucle `for` pour parcourir les $2n$ jours. Avec probabilité p (ce qui se passe si `rd.rand() <=p`) on augmente de 1 et dans le cas contraire, on baisse de 1. Le programme est sans difficulté.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X_2(n, p) :
    x=0
    for k in range(2*n) :
        if rd.rand()<=p :
            x=x+1
        else :
            x=x-1
    return x
```

b. La liste `L` contient, à l'issue de la boucle `for` 1000 réalisations de X_{2n}. Ensuite on parcourt cette liste et lorsque le terme est positif, la variable `c` (initialisée à 0) augmente de 1. Cette variable compte donc le nombre de réalisations où $X_{2n} \geq 0$. On renvoie $c/1000$, c'est donc la fréquence observée de $[X_{2n} \geq 0]$ soit une *estimation* (ou valeur approchée) de $P(X_{2n} \geq 0)$.

c. On a représenté graphiquement l'évolution de l'estimation de $P(X_{2n} \geq 0)$ pour n variant de 1 en 200. Le nuage de points semble relativement concentré autour de $1/2$. Il est raisonnable de conjecturer que, dans le cas $p = 1/2$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_{2n} \geq 0) = \frac{1}{2}.$$

2. Dans le pire des cas, on peut perdre 1 euro chaque jour pendant $2n$ jours et dans le meilleur des cas, gagner 1 euro chaque jour. Toutes les situations intermédiaires sont possibles, donc

$$X_{2n}(\Omega) = [\![-2n; 2n]\!].$$

3. On note Y_{2n} le nombre de jours (durant les $2n$ jours d'observation) où l'action a monté, et Z_{2n} le nombre de ceux où elle a baissé.

a. Les $2n$ jours se répartissent entre ceux où l'action monte et ceux où elle descend. Il est alors clair que

$$Y_{2n} + Z_{2n} = 2n.$$

b. Y_{2n} (resp. Z_{2n}) compte, parmi les $2n$ répétitions (chaque jour on répète le processus), le nombre de succès (l'action monte - resp. l'action baisse). Les évolutions étant indépendantes chaque jour, on a un schéma de Bernoulli répété de manière indépendante et donc des lois binomiales :

$$Y_{2n} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, p), \qquad Z_{2n} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, q).$$

Le cours donne directement

$$E(Y_{2n}) = 2np, \quad V(Y_{2n}) = 2npq, \quad E(Z_{2n}) = 2nq, \quad V(Z_{2n}) = 2nqp.$$

4. Chaque jour où l'action monte, on gagne 1 euro, il y a Y_{2n} jours où elle monte. Pour les Z_{2n} jours restant on perd 1 euros donc on "gagne" -1 euro. Au final, on a clairement

$$X_{2n} = Y_{2n} - Z_{2n}.$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(X_{2n}) = E(Y_{2n} - Z_{2n}) = E(Y_{2n}) - E(Z_{2n}) = 2np - 2nq = 2n(p - q).$$

Si $p = q = 1/2$, cette espérance est nulle, ce qui n'est pas surprenant. S'il est équiprobable que l'action monte ou descende chaque jours, après un nombre pair de jours, en son cours est en moyenne nul.

5. Soit $k \in [\![-n; n]\!]$. Remarquant que $X_{2n} = Y_{2n} - Z_{2n} = 2Y_{2n} - 2n$, et que $n + k \in [\![0; 2n]\!]$, on a

$$P(X_{2n} = 2k) \quad = \quad P(2Y_{2n} - 2n = 2k) = P(Y_{2n} = n + k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k},$$

ce qui permet ensuite d'écrire

$$p_n = P(X_{2n} \geq 0) = \sum_{k=0}^{n} P(X_{2n} = 2k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k},$$

qui est bien la formule attendue.

Partie II : Des coefficients binomiaux

On considère la suite (S_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

6. a. D'après la définition de S_n, on a

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=0}^{1} \binom{2}{1+i} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \\ &= 2+1=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=0}^{2} \binom{4}{2+i} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \\ &= 6+4+1=11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{i=0}^{3} \binom{6}{3+i} = \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} \\ &= 20+15+6+1=42. \end{aligned}$$

b. On rappelle qu'en Python, la commande np.prod(liste) permet d'obtenir le produit des valeurs de la liste prise en argument.

(i) Par définition,

$$\binom{2n}{n+i} = \frac{(2n)!}{(n+i)!(n-i)!} = \frac{\prod_{j=n-i+1}^{2n} j}{\prod_{j=1}^{n+i} j}.$$

(ii) Ceci permet d'écrire, sans difficulté

```
def suite_S(n):
  y=0
  for k in range(n):
    y=y+np.prod(range(n-i+1,2*n+1))/np.prod(range(1,n+i+1))
  return y
```

c. D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} 1^i 1^{2n-i} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}.$$

d. Par définition,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j} \qquad \text{(d'une part)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n-i} \qquad \text{(par symétrie)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n-i} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{j} \end{aligned}$$

On a donc

$$2S_n = S_n + S_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{j} + \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} + \binom{2n}{n}.$$

Ceci permet, avec la question précédente,

$$2S_n = 2^{2n} + \binom{2n}{n},$$

ce qui donne bien, en divisant par 2,

$$S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

7. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \binom{2p}{p} 2^{-2p}$.

a. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{u_{p+1}}{u_p} &= \frac{\binom{2(p+1)}{p+1} 2^{-2(p+1)}}{\binom{2p}{p} 2^{-2p}} \\
&= \frac{[2(p+1)]!p!p!}{2^2(p+1)!(p+1)!(2p)!} \\
&= \frac{(2p+2)(2p+1)}{2(p+1)2(p+1)} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2},
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

b. On raisonne, comme demandé, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

- <u>initialisation</u>. Pour $p = 1$, on a
$$0 \leq u_1 = \binom{2}{1} 2^{-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$
car $\sqrt{3} \leq \sqrt{4} = 2$.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, on ait
$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$
Alors, d'après la question précédente
$$\begin{aligned}
u_{p+1} &= \frac{2p+1}{2p+2} u_p \leq \frac{2p+1}{2p+2} \frac{1}{\sqrt{2p+1}} = \sqrt{\frac{(2p+1)(2p+1)}{(2p+2)(2p+2)(2p+1)}} \\
&\leq \sqrt{\frac{2p+1}{(2p+2)^2}}.
\end{aligned}$$
Or,
$$\begin{aligned}
\frac{2p+1}{(2p+2)^2} \leq \frac{1}{2p+3} &\iff (2p+1)(2p+3) \leq (2p+2)^2 \\
&\iff 4p^2 + 8p + 3 \leq 4p^2 + 8p + 4 \\
&\iff 3 \leq 4,
\end{aligned}$$
ce qui est vrai. On a donc la majoration voulue et la récurrence est terminée.

c. Par théorème des gendarmes, on peut donc conclure que

$$\lim_{p\to+\infty} u_p = 0.$$

8. On revient aux variables aléatoires de la Partie 1. On suppose, dans cette question que $p = 1/2$. On rappelle que $p_n = P(X_{2n} \geq 0)$.
On a, d'après la question précédente

$$\begin{aligned} p_n &= P(X_{2n} \geq 0) = \sum_{k=0}^{n} P(X_{2n} = 2k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} = 2^{-2n} S_n \\ &= 2^{-2n}\left(2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}\right) \qquad \text{(d'après la Question (6d))} \\ &= \frac{1}{2} + \binom{2n}{n} 2^{-(2n+1)}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.
On utilise les calculs ci-avant.

$$\begin{aligned} p_1 &= 2^{-2} S_1 = \frac{3}{4}, \\ p_2 &= 2^{-4} S_2 = \frac{11}{16} \\ p_3 &= 2^{-6} S_3 = \frac{42}{64} = \frac{21}{32}. \end{aligned}$$

On observe aussi que

$$p_n = \frac{1}{2}\left(1 + u_n\right).$$

En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2},$$

ce qu'on avait conjecturé à l'aide de Python.